Probabilités, espérance et nombres complexes

I) Jouons aux dés [CG 2009]

On lance 4 dés équilibrés à 20 faces numérotées de 1 à 20. Lorsque, parmi les 4 dés, une face apparaît au moins deux fois, on marque le nombre de points correspondant à cette face.

1. Quelle est la probabilité de ne rien marquer ?

2. Soit $a \in [\![1, 20]\!]$. Déterminer pour tout $k \leq 4$ la probabilité d'avoir exactement k nombres a parmi les dés lancés.

3. On note X_a la variable aléatoire qui vaut 1 s'il y a au moins deux dés égaux à a parmi les quatre du lancer, et à 0 sinon.

- **a.** Préciser la loi de X_a et exprimer le gain G à l'aide de ces variables.
- **b.** Combien de points peut-on espérer en moyenne ?

4. Quelle est la probabilité de marquer exactement 8 points ?

II) Allons dans $\mathbb{C}$ [CG 2016]

Dans tout le problème, j désigne le nombre complexe $e^{2\pi i/3}$. La probabilité d'un évènement A est notée $\mathbf{P}(A)$.

1.
- **a.** Vérifier que $j^3 = 1$ et $1 + j + j^2 = 0$.
- **b.** Que peut-on dire du triangle dont les sommets ont pour affixes $1, j, j^2$?
- **c.** Montrer que si a, b, c sont des nombres réels, alors $a + bj + cj^2 = 0$ si et seulement si $a = b = c$.

On lance un dé équilibré (six faces numérotées de 1 à 6). On note F la variable aléatoire donnant le nombre obtenu, et on note Z la variable aléatoire j^F.

2. Montrer que Z est à valeurs dans $\left\{1, j, j^2\right\}$ et que $\mathbf{P}(Z = 1) = \mathbf{P}(Z = j) = \mathbf{P}\left(Z = j^2\right) = \frac{1}{3}$.

On considère un entier $n \geq 1$ et on lance le dé n fois (lancers indépendants). On note F_k le résultat du k-ième lancer et $Z_k = j^{F_k}$. On note $S_n = Z_1 + \cdots + Z_n$ et $p_n = \mathbf{P}(S_n = 0)$. On note U_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $Z_k = 1$; on note V_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $Z_k = j$ et W_n celle qui donne le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $Z_k = j^2$.

3.
- **a.** Déterminer $U_n + V_n + W_n$.
- **b.** Montrer que $S_n = U_n + jV_n + j^2 W_n$.
- **c.** Montrer que $S_n = 0$ si et seulement si $U_n = V_n = W_n$.
- **d.** En déduire que si n n'est pas multiple de 3, alors $p_n = 0$.

4. On suppose qu'il existe un entier naturel non nul m tel que $n = 3m$.

- **a.** Montrer que la variable aléatoire U_n suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
- **b.** En déduire que $\mathbf{P}(U_n = m) = \binom{3m}{m} \frac{2^{2m}}{3^{3m}}$.

On note $\mathbf{P}_{U_n = m}(V_n = m)$ la probabilité conditionnelle de $V_n = m$ sachant $U_n = m$.

- **c.** Montrer $\mathbf{P}_{U_n = m}(V_n = m) = 2^{-2m} \binom{2m}{m}$.
- **d.** En déduire $p_{3m} = 3^{-3m} \binom{3m}{m} \binom{2m}{m}$.

La question précédente, combinée à une expression classique des coefficients binomiaux, entraîne, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la relation suivante, qu'on ne demande pas de démontrer :

$$\frac{p_{3m+3}}{p_{3m}} = \frac{(3m+2)(3m+1)}{9(m+1)^2}$$

5. Pour tout entier $m \geq 1$, montrer que $\frac{m}{m+1} \leq \frac{p_{3m+3}}{p_{3m}}$ et en déduire que $p_{3m} \geq \frac{2}{9m}$.

Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'entiers $k \in [\![1, n]\!]$ tels que $S_k = 0$.

6.
- **a.** Déterminer des variables de Bernoulli Y_k, avec $1 \leq k \leq n$, telles que $X_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.
- **b.** On note $\mathbf{E}(X_n), \mathbf{E}(Y_1), \ldots, \mathbf{E}(Y_n)$ les espérances de $X_n, Y_1, \ldots, Y_n$. En admettant que $\mathbf{E}(X_n) = \mathbf{E}(Y_1) + \cdots + \mathbf{E}(Y_n)$, montrer que $\mathbf{E}(X_n) = p_1 + \cdots + p_n$.
- **c.** En déduire que $\lim_{n \to \infty} E(X_n) = +\infty$.

Soit q_n la probabilité que l'un des S_k soit nul pour $1 \leq k \leq n$, c'est-à-dire $q_n = \mathbf{P}(X_n > 0)$. L'objectif de la question suivante est de montrer que la suite (q_n) converge vers 1.

7.
- **a.** Montrer que la suite (q_n) converge vers un réel q et que $q_n \leq q \leq 1$ pour tout n.
- **b.** Pour r, n entiers naturels non nuls, montrer que $\mathbf{P}(X_n \geq r) \leq q^r$.
- **c.** En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, que $\mathbf{E}(X_n) \leq q + q^2 + \cdots + q^n$.
- **d.** Conclure.

III) Tirages dans une urne

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules, numérotées de 1 à n. On répète l'expérience suivante jusqu'à ce que l'urne soit vide. :

1. on tire une boule de l'urne de numéro k.
2. on retire de l'urne toutes les boules de numéros supérieurs (ou égaux) à k,

On note

- X_k le numéro de la boule tirée au k-ème tirage, s'il y a au moins k tirages, et -1 si le procédé s'est arrêté avant le k-ème tirage.
- T_k l'évènement «la boule numéro k est tiré à un instant».
- N_n le nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne.

1. Exemples

a. En général, que valent $\mathbb{P}(T_n)$ et $\mathbb{P}(T_1)$?

b. On suppose $n = 3$. Déterminer $\mathbb{P}(T_2)$, et la loi de N_3.

2. Formule de récurrence. Soit $n \geq 2$.

a. Montrer que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\quad \mathbf{P}(N_n = k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbf{P}(N_i = k-1)$

b. En déduire que $\quad \mathbf{P}(N_n = k) = \dfrac{n-1}{n}\mathbf{P}(N_{n-1} = k) + \dfrac{1}{n}\mathbf{P}(N_n = k-1).$

3. Somme de lois de Bernoulli.

On considère des variables $Y_1, \dots, Y_n$ indépendantes, où Y_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{i}$, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(Y_i = 1)\frac{1}{i}$ et $\mathbf{P}(Y_i = 0) = 1 - \frac{1}{i}$.

On considère la variable $Z_n = Y_1 + \cdots + Y_n$.

a. Montrer que, pour $k \in [\![1, n]\!]$, $\quad \mathbf{P}(Z_n = k) = \dfrac{n-1}{n}\mathbf{P}(Z_{n-1} = k) + \dfrac{1}{n}\mathbf{P}(Z_n = k-1).$

b. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(Z_n = k) = \mathbf{P}(N_n = k)$.

c. Quelle est l'espérance de N_n ?

d. Quelle est la variance de N_n ?

4. Convergence en loi de $\frac{N_n}{\ln n}$. On note $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

a. Justifier que pour tout $k \geq 2$, on a l'encadrement $\quad \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

b. En déduire qu'il existe des constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln n + C_1 \leq H_n \leq \ln n + C_2$.

On rappelle l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev : pour toute variable aléatoire réelle Y, et tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\mathbf{P}\big(|Y - \mathbf{E}(Y)| \geq \varepsilon\big) \leq \frac{\mathbf{V}(X)}{\varepsilon^2}.$$

c. Montrer que $\mathbf{P}\left(\left|\frac{N_n}{\ln n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$

IV) La racine du carré

On considère l'ensemble $\mathbb{U}_m = \left\{\exp\left(\frac{2ik\pi}{m}\right) / 0 \leq k \leq m-1\right\}$; on rappelle que c'est aussi l'ensemble des racines m-ièmes complexes de l'unité, c'est à dire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant $z^m = 1$.

On se donne un entier strictement positif n et on cherche s'il existe une fonction $f\colon \mathbb{U}_{2n} \to \mathbb{U}_{2n}$ vérifiant $f(f(z)) = z^2$ pour tout z dans $\mathbb{U}_{2n}$.

1. Montrer que l'ensemble $\left\{z^2 / z \in \mathbb{U}_{2n}\right\}$ est égal à $\mathbb{U}_n$ et qu'il est inclus dans $\mathbb{U}_{2n}$.

2. On suppose qu'il existe une solution f au problème considéré.

a. Vérifier que $f\left(z^2\right) = (f(z))^2$ pour tout z dans $\mathbb{U}_{2n}$.

b. Montrer que $f(z) = f\left(z'\right) \Rightarrow z = \pm z'$ et que $f(1) = f(-1) = 1$.

3. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément de z de $\mathbb{U}_{2n}$ qui vérifie $z^2 = -1$?

Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

4. Selon la valeur de n, existe-t-il un élément de z de $\mathbb{U}_{2n}$ qui vérifie $z^3 = 1$ avec $z \neq 1$?

Si oui, vérifier qu'alors il n'y a pas de fonction f solution.

5. On suppose dans toute la suite de l'énoncé que l'entier n est impair.

a. Vérifier que la fonction g de $\mathbb{U}_n$ dans lui-même qui à z appartenant à $\mathbb{U}_n$ associe z^2 est bijective.

b. On suppose qu'il existe une solution f au problème. Vérifier qu'il existe une application $\varphi : \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$.

c. Réciproquement, on suppose qu'il existe une fonction $\varphi\colon \mathbb{U}_n \to \mathbb{U}_n$ telle que $\varphi \circ \varphi = g$. Construire alors une solution f au problème.

d. Exemple : on prend $n = 5$, dire s'il existe une solution au problème, si oui en construire une.

e. Même question avec $n = 7$ puis $n = 9$.